$T_x(M_m)$ ковектором η_i^{n+2}.

б/Условия (II_2) означают, что все векторы $\vec{\xi}_\alpha = \xi_\alpha^i \vec{\Lambda}_i$ коллинеарны структурному вектору $\vec{\xi}_{n+2}$.

в/Условия (II_3) означают, что пучок плоскостей $\eta_i^\alpha x^i = 0$, принадлежащий $T_x(M_m)$, вырождается в $(m-1)$-мерную плоскость, совпадающую с плоскостью $\eta_i^{n+2} x^i = 0$.

Почти контактное погружение возможно, если ранги матриц $\|f\|$ и $\|\rho\|$ индуцированной на M_m (f,ξ,η,ρ)-структуры равны, соответственно, $(m-1)$ и $(n+1-m)$.

Задача контактного погружения в контактное метрическое пространство рассматривалась в работе [4].

Список литературы

1. Е в т у ш и к Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-В сб.:Проблемы геометрии .Т.9.Итоги науки и техники ВИНИТИ АНСССР .М.,1979,с.5-246

2. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии.-В сб.: Труды геом.семинара.Т.1.Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.М.,1966,с.139-190.

3. О с т и а н у Н.М., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами.-В сб.:Проблемы геометрии.Т.11.Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, М.,1980,с.3-66.

4. Okumura M., Contact Riemannian submanifolds. „J. Different. Geom.", 1970, 4, N1, 21-35.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.13 1982

Н.Д.П о л я к о в

ОБ $N(\sigma)$-АНТИИНВАРИАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

1.Рассмотрим $n+1$ -мерное дифференцируемое многообразие M_{n+1} $(n=2q)$. Известно [1], что над каждой окрестностью U можно построить последовательность форм $\omega^\gamma_\varkappa$, $\omega^\gamma_{\varkappa_1\varkappa_2}$, ... ,обладающих расслоенной структурой по отношению к базовым формам ω^γ $(\gamma,\varkappa,\mathcal{L},\ldots=1,2,\ldots,n+1)$.

Пусть на M_{n+1} задана почти контактная структура со структурными объектами φ,ξ,η:

$$\varphi^\gamma_\varkappa \varphi^\varkappa_{\mathcal{L}} = -\delta^\gamma_{\mathcal{L}} + \xi^\gamma \eta_{\mathcal{L}}, \qquad (1)$$

$$\varphi^\gamma_\varkappa \xi^\varkappa = 0, \quad \varphi^\gamma_\varkappa \eta_\gamma = 0, \quad \xi^\gamma \eta_\gamma = 1.$$

Рассмотрим m -мерное дифференцируемое подмногообразие M_m, вложенное в $M_{n+1}(\varphi,\xi,\eta)$:

$$\omega^\gamma = \Lambda^\gamma_i \theta^i, \qquad (2)$$

где θ^i -структурные формы многообразия параметров S_m $(i,j,\ldots=1,\ldots,m)$. В каждой точке $x\in M_m$ касательная плоскость $T_x(M_m)$ определяется системой m -линейно независимых векторов $\vec{\Lambda}_i = \Lambda^\gamma_i \vec{e}_\gamma$. Оснастим теперь поверхность M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ полем нормально оснащающих плоскостей N_x. В каждой плоскости N_x зададим $(n+1-m)$ - линейно независимых векторов $\vec{N}_\sigma = N^\gamma_\sigma \vec{e}_\gamma$, где $\sigma,\tau,\ldots = m+1,\ldots,n+1$.

2.В работе [2] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а (см.[2], §5). Если поверхность M_m, погруженная в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, нормально оснащена полем плоскостей N_x, то на M_m естественным образом возникает $(f\xi\eta\rho)$ -структура.

Структурные объекты индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_m f_j^i, $\eta_j^A=\{\eta_j^\sigma, \eta_j^{(n+2)}\}$, $\xi_B^i=\{\xi_\tau^i, \xi_{(n+2)}^i\}$, $\rho_B^A=\{\rho_\tau^\sigma, \rho_{(n+2)}^\sigma, \rho_\tau^{(n+2)}; \rho_{(n+2)}^{(n+2)}=0\}$ определяются из разложения векторов $\varphi\vec{\Lambda}_i, \varphi\vec{N}_\sigma, \vec{\xi}$ по векторам $\vec{\Lambda}_i, \vec{N}_\sigma$:

$$\varphi\vec{\Lambda}_i = f_i^j\vec{\Lambda}_j + \eta_i^\sigma\vec{N}_\sigma, \tag{3}$$

$$\varphi\vec{N}_\sigma = -\xi_\sigma^j\vec{\Lambda}_j + \rho_\sigma^\tau\vec{N}_\tau, \tag{4}$$

$$\vec{\xi} = \xi_{(n+2)}^j\vec{\Lambda}_j - \rho_{(n+2)}^\tau\vec{N}_\tau, \tag{5}$$

а также из формул

$$\eta_i^{(n+2)} = \eta_\gamma\Lambda_i^\gamma, \tag{6}$$

$$\rho_\sigma^{(n+2)} = \eta_\gamma N_\sigma^\gamma.$$

З а м е ч а н и е. Максимальные значения ранга и коранга индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_m равны соответственно m и $(n+2-m)$.

3. В этой работе будем считать, что $m \le \frac{n}{2}+1$. При этом поверхность M_m допускает оснащение полем σ-параметрических пучков $N(\sigma)$ плоскостей $N_x(\sigma)$ (размерность p оси каждого пучка равна m или $m-1$ и $\sigma = n-p$).

О п р е д е л е н и е I. [3] Подмногообразие M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ будем называть подмногообразием $N(\sigma)$-антиинвариантным, если образ касательной плоскости $T_x(M_m)$, полученный под действием структурного аффинора φ, совпадает с осью σ-параметрического пучка нормалей $N_x(\sigma)$.

О п р е д е л е н и е 2. [3] Распределение I-мерных линейных элементов Λ в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ $(m \le \frac{n}{2}+1)$ будем называть $N(\sigma)$-антиинвариантным распределением, если образ элемента Λ_x, полученный под действием аффинора φ, совпадает с осью пучка нормалей $N_x(\sigma)$.

Понятие $N(\sigma)$-антиинвариантности в многообразии

почти контактной структуры обобщает известное понятие антиинвариантности в многообразии метрической почти контактной структуры (см. [4]).

Из определения I следует, что если поверхность M_m $N(\sigma)$-антиинвариантна, то образ касательной плоскости $\varphi T_x(M_m)$ принадлежит каждой плоскости N_x пучка $N_x(\sigma)$ $(\varphi T_x(M_m) \subset N_x)$. Следовательно, для $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности M_m в разложении (3) компоненты f_j^i структурного объекта $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_m тождественно обращаются в нуль:

$$f_j^i = 0. \tag{8}$$

Верно и обратное утверждение, т.е. если для некоторой поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, нормально оснащенной полем σ-параметрических пучков $N(\sigma)$, выполняются условия (8), то M_m $N(\sigma)$-антиинвариантная поверхность. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а I. Поверхность M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ $N(\sigma)$-инвариантна тогда и только тогда, когда выполняются условия (8).

При выполнении условий (8) $\operatorname{rang}\|f\| = 0$, а $\operatorname{rang}\|\rho\| = (n+2-2m)$. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 2. Ранг и коранг индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности M_m принимают минимально возможные значения для данного подмногообразия (ранг равен нулю, коранг $-(n+2-2m)$).

При доказательстве теоремы о существовании $N(\sigma)$-антиинвариантных подмногообразий в многообразии почти контактной структуры различаем три типа поверхностей:

1. $\vec{\xi}_x \notin T_x(M_m)$, $T_x(M_m) \not\subset \eta_x$;
2. $\vec{\xi}_x \in T_x(M_m)$;
3. $T_x(M_m) \subset \eta_x$.

З а м е ч а н и е. Размерность p оси пучка нормалей $N(\sigma)$ равна m, если поверхность M_m -типа I или 3 и p равна $m-1$, если поверхность M_m -типа 2.

Введем понятие $N(\sigma)$-антиинвариантных распределений в многообразии почти комплексной структуры со структурным тензором F.

Определение 3[3]. Распределение m-мерных линейных элементов Λ в многообразии почти комплексной структуры M_m $(m \le \frac{n}{2})$ будем называть $N(\sigma)$-антиинвариантным распределением, если образ элемента Λ_x, полученный под действием аффинора F, совпадает с осью пучка нормалей $N(\sigma)$.

Теорема 3. Поверхность M_m $(m \le \frac{n}{2})$ типа 1 в $M_{n+1}(\varphi\xi,\eta)$ $N(\sigma)$-антиинвариантна тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in M_m$ распределение плоскостей $\lambda_x = \eta_x \cap T_x(M_m)$ – $N(\sigma)$-антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η, плоскость α_x, натянутая на плоскость $\varphi\lambda_x$ и вектор $\vec{\xi}_x$, не пересекается с $T_x(M_m)$.

Доказательство. I/Необходимость. Пусть в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ поверхность M_m первого типа и $N(\sigma)$-антиинвариантна, а следовательно, плоскость $\varphi T_x(M_m)$ является осью пучка нормальных плоскостей $N_x(\sigma)$ и $\lambda_x \cap \varphi\lambda_x = \{x\}$. Это означает, что распределение λ $N(\sigma)$-антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η. Очевидно, что плоскость $\varphi\lambda_x$ является гиперплоскостью плоскости $\varphi T_x(M_m)$, а плоскость α_x, натянутая на плоскость $\varphi\lambda_x$ и вектор $\vec{\xi}$, является подплоскостью нормальной плоскости $N_x \subset N_x(\sigma)$. Следовательно, $\alpha_x \cap T_x(M_m) = \{x\}$.

2/Достаточность. Пусть в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ для некоторой поверхности M_m первого типа $(m \le \frac{n}{2})$ выполнены условия: I/распределения плоскостей λ_x – $N(\sigma)$-антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η; 2/в каждой точке $x \in M_m$ плоскость α_x, натянутая на плоскость $\varphi\lambda_x$ и вектор $\vec{\xi}_x$, не пересекаются с касательной плоскостью $T_x(M_m)$. Докажем, что при выполнении этих условий M_m является $N(\sigma)$-антиинвариантной. Для этого докажем, что плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ не имеют общих направлений. Так как λ_x – $N(\sigma)$-антиинвариантно в η, то $\lambda_x \cap \varphi\lambda_x = \{x\}$, а следовательно, плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ могут пересекаться только по одномерному подпространству. Плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ пересекутся, если в $T_x(M_m)$ существует вектор $\vec{x}$ такой, что $\varphi\vec{x} \in \lambda_x$. Под действием аффинора φ двумерная плоскость β_x, натянутая на векторы $\vec{x}_x$ и $\vec{\xi}_x$, преобразуется в образ вектора $\vec{\varphi}_x$, определяющего прямую пересечения t плоскости β_x с η_x. Очевидно, $\varphi\vec{y}_x \in \lambda_x$. Последнее означает, что прямая t_x принадлежит плоскости $\varphi\lambda_x$, а следовательно, плоскость β_x пересекается с $\varphi\lambda_x$ по прямой t_x. Так как β_x есть подплоскость m-мерной плоскости α_x. Из этого следует, что α_x пересекается с $T_x(M_m)$ по прямой, определенной вектором $\vec{x}_x$. А это противоречит условию.

Итак, мы доказали, что плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ не имеют общих направлений. Поэтому $\varphi T_x(M_m)$ можно принять за ось пучка $(n+1-m)$-мерных нормалей $N_x(\sigma)$, относительно которого поверхность M_m является $N(\sigma)$-антиинвариантной.

Справедливы также следующие теоремы.

Теорема 4. Поверхность M_m $(m \le \frac{n}{2}+1)$ типа 2 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ $N(\sigma)$-антиинвариантна тогда и только тогда, когда распределение плоскостей $\lambda_x = T_x(M_m) \cap \eta_x$ $N(\sigma)$-антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η.

Теорема 5. Поверхность типа 3 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ $N(\sigma)$-антиинвариантна тогда и только тогда, когда она $N(\sigma)$-антиинвариантна относительно почти комплексной структуры, действующей в η.

Список литературы

I. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. -В сб.: Тр. геометрич. семинара. Т.I. ВИНИТИ АН СССР, М., I966, I39-I90.

2. О с т и а н у Н.М., Поляков Н.Д, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. –В сб.: Проблемы геометрии. Т.11. ВИНИТИ АН СССР. М., 1980, с.3–64.

3. П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\sigma)$-антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры.– В сб.: Проблемы геометрии, Т.13, ВИНИТИ АН СССР, М., 1982.

4. Yano Kentaro, Kon Masahiro, Anti-invariant submanifolds. Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. 21, Marcel Dekker. New York-Basel, 1976, viii, 182 pp.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.13 1982

Е.В. С и л а е в

О СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе получены неравенства, которым удовлетворяет скалярная кривизна поверхности, лежащей на гиперсфере евклидова пространства E_n.

Пусть поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ с центром в точке O и радиусом r евклидова пространства E_n. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,\ldots=1,\ldots,p;\alpha,\beta,\ldots=p+1,\ldots,n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ лежали в касательном пространстве T_x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ составляли ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x в точке x.

Так как для любой точки x поверхности V_p, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, вектор $\vec{x}$ принадлежит пространству N_x, то $\vec{x}=x^\alpha\vec{x}_\alpha$, где $\vec{x}=\vec{Ox}$, $\sum_\alpha (x^\alpha)^2=r^2$. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,$$
$$d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,$$
$$d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta.$$

При смещении точки x вдоль поверхности V_p имеем $\omega^\alpha=0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом и применяя лемму Картана, получим $\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j$, $b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$.

Пусть $\vec{M}$ –вектор средней кривизны поверхности V_p [1] и $\vec{b}_{ij}=b_{ij}^\alpha\vec{e}_\alpha$.